

中国计量大学

2020 年硕士研究生招生考试试题

考试科目代码：713

考试科目名称：数学分析

所有答案必须写在报考点提供的答题纸上，答在试卷或草稿纸上无效。

一、填空题（每小题 8 分，共 64 分）

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right) =$ _____;

2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = \sin at \\ y = \cos bt \end{cases}$ 所确定，则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} =$ _____;

3. 曲面 $\sin(x+z) - y(z+2) + e^{xy} = 1$ 在点 $(-1, 0, 1)$ 处的切平面方程是 _____;

4. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\cos x}{x}$ ，则 $\int x f'(x) dx =$ _____;

5. 积分 $\int_0^1 dy \int_{1-y}^1 \frac{y \sin x}{x} dx =$ _____;

6. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域是 _____;

7. 设 $z = f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $u = x + cy$ ， $v = x - cy$ ，其中 c 为非零常数，则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$
 _____;

8. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3} \right)^{\frac{1}{\sin x}} =$ _____。

二、计算题（每小题 12 分，共 72 分）

1. 求不定积分 $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x+1}}$ ；

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t dt}{x^3(e^x - 1)}$ ；

3. 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$ ，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = 9$ 所围成的闭区域；

4. 设 $a_n = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ；

5. 计算曲线积分 $\int_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ ，其中 $L: x^2 + y^2 = 1$ 取逆时针方向；

6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数。

三、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 设 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ ，证明： $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根。

2. 设 $u_n \neq 0$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$ ，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 是条件收敛。

【完】